
古典力学の解析化

1. 目的

18世紀前半における古典力学の解析化について報告する。この当時の主導的研究者として Daniel Bernoulli (1700-1782), Alexis-Claude Clairaut (1713-1765), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783) を挙げ、彼等が共通して論じた物体の回転運動の取り扱いを検討し、18世紀に行なわれた古典力学の解析化、代数化は誰により、どの様に行われたかを探る。

2. Newton の第 2 法則の取り扱い

まず、彼等が物体の運動を研究する時、共通して用いる関係式は今日 Newton の第 2 法則として知られている関係式である。しかし、彼等がこの式に与えた形而上学的意味は異なる。Daniel Bernoulli にとっては、この関係式は偶然的真理に過ぎないが、Euler にとっては必然的真理である。また、d'Alembert にとっては単なる力の定義式でしかなかった。

Daniel Bernoulli, Clairaut, d'Alembert はこの関係式を $dv = \varphi dt$ と表し、Euler は $2Mddx = Pdt^2$ と表した。ここで、 v は物体の速さ、 φ は加速力 (la force accélératrice), M は物体の質量、 P は物体に働く外力である。しかし、彼等が用いた関係式が Newton の第 2 法則の数学的書き換えであると考えるのは早計である。

3. 剛体の運動理論の発展

4人の解法の違いを見るのには、回転する管に含まれる質点の運動の取り扱いを見るのが適当であろう。Johann Bernoulli により初めて論じられたこの問題を、1740年代初めに Daniel Bernoulli, Clairaut, Euler は互いに密接な連絡を取りながら論じ、各自の研究結果を論文として発表した。ここで、特に、Euler は2つの手法により、この問題を解いたことが注目される (これらの手法をそれぞれ、旧手法、新手法と名づける)。また、d'Alembert は *Traité de dynamique* のなかで、この問題を解いた。しかし、彼らの解法は大きく、2分できる。一つは Daniel Bernoulli, Clairaut, d'Alembert, Euler の旧手法であり、もう一つは Euler の新手法である。

3-1. Daniel Bernoulli, Clairaut, d'Alembert の方法、そして Euler の旧手法による方法

これらの方法は、幾何学的方法と呼ぶことができるであろう。すなわち、17世紀からの伝統である、微小時間 dt に物体が動いた微小距離の1次微分や2次微分を図形上で表し、上記の関係式 $dv = \varphi dt$ や力のモーメントの概念、また等加速度運動の公式、そして d'Alembert

の原理,あるいは類似の原理を用いて管中の質点の運動を求める. この d'Alembert の原理は現在のそれとは内容が異なり, また当時は多くの研究者により用いられた.

3-2. Euler の新手法による方法

それに対し, Euler は新手法で私たちに馴染み深い, 代数的手法を用いる. すなわち, 管に沿った方向と管に垂直な方向を座標軸とする, 管に固定された直行座標系を取り, 質点に働く力をそれらの方向に分解し, 運動方程式 $2Mddx = Pdt^2$ を立てる. また, 管に対しては, 力のモーメントを考慮し, 固定点の周りの回転運動に関する方程式 $N = I \frac{d\omega}{dt}$ を立てる. ここで, I は管の慣性モーメントである. この際, Euler は質点に関する運動方程式 $2Mddx = Pdt^2$ ($P = 2M \frac{ddx}{dt^2}$) と $N = I \frac{d\omega}{dt}$ の間の対応を念頭においている.

3-3. Euler による, 剛体の運動理論の発展

この問題の解法を転機に, Euler は旧手法を捨て, 新手法により力学の問題を解こうとする. 次に Euler が取り組んだのは, 自由な軸の周りに回転する剛体が斜めから力を受ける時, 剛体の運動の変化を求めるという, 更に一般的な問題である. 地球の歳差運動を扱った d'Alembert の著作にヒントを得, 直行する 3 本の座標軸に関して剛体を受ける角運動量の変化=外力によるトルクという関係式を得る. これに Euler 角を組み合わせることにより, 剛体の回転運動に関する Euler 方程式を得る.

3-4. Euler の保存則への態度

Daniel Bernoulli は管中の質点の運動を論じる際, 初めて角運動量保存則を用いた. 更に, 当時良く用いられたもう一つの保存則に, 活力保存則がある. このような保存則に対する Euler の態度は興味深いものがある. 彼にとり根本原理は $2Mddx = Pdt^2$ であり, 保存則は派生原理 (*des principes derivatifs*) に過ぎない. 問題を解く時, 保存則を使うのは解法が簡単になるという理由からだけであって, 根本原理を使うのが彼には自然と映る. 何故なら, この原理はすべての変化の真の原因も示すので.

4. 結論

Clairaut と d'Alembert の解法, そして Euler の旧手法による解法は, 無限小量と幾何学的関係を用いた 17 世紀の伝統に基づく方法であった. また, Daniel Bernoulli の解法は, 17 世紀からの伝統の上に, 角運動量の保存の概念を導入した新しい方法であった. しかし, これらの方法は, 与えられた問題をそれぞれの場合, いかにか巧く解くかという立場から提出された方法であり, いかなる場合にも適用できる根本的な原理の適用ではなかった. これに対し, 物体に働く力を直行座標軸方向に分解し, それぞれの成分に関して運動方程

式を立てるといふ新しい解法を用いることにより、Euler は最も一般的な剛体の運動、すなわち剛体の回転運動に関する Euler 方程式にまで至る。

しかし、 $2Mddx = Pdt^2$ を根本原理とし、保存則を派生原理に過ぎないとする彼の法則観によれば、Euler の力学から Lagrange の力学へスムーズに移行するのは困難が伴うように思われる。この問題の解決は今後の課題であろう。