シンポジュウム

アインシュタインの思考をたどる

特殊相対性から一般相対性へ

(科学哲学科学史研究室創立 10 周年記念行事)

コメンテイター 菅野礼司

2003/03/16

第 1 部 相対的時空と等価原理

1. 時間、空間、速度の関係

絶対時空を否定して相対時空を前提にするならば、**「時間、長さ、速度の定義」は相互規定的循環論となる**。速度を定義するには時間と空間の測り方が決まっていなければならず、時間を決めるには、一定速度の周期運動などを用いるが、その速度が一定であることを知らねばならない。離れた 2 地点での長さの比較についても同様に、信号速度と伝播時間を知らねばならない。

時間、長さ、速度の 3 つの中の 2 つを何かの方法で規定 (仮定) すれば、それによって残る 1 つが定義できる。

アインシュタインは、特殊相対性理論では「光速度一定性」の仮定により、まず速度を規定し、時空については、各慣性系ごとに、一様時間とユークリッド空間を前提として「時間、長さ、速度」の関係を組み立てた。

2. 特殊相対性理論の基礎原理

特殊相対性理論は、

運動の相対性、光速度一定性

を基礎原理とし、それを基に運動学と力学が築かれている。

運動学では慣性系間の関係を与えるローレンツ変換 (LT) が中心的役割を担う。LT を導く際、「光速度一定性」ばかりでなく、「運動の相対性」すなわち、どちらの系から見ても相対速度の大きさは、同じ v と $-v$ とすることが効いている。すべての慣性系で「光速度一定」であれば、時空尺度は慣性系ごとに異なるので、このことは自明ではなく、仮定である。時空尺度とは違い、相対速度に関しては共通なのである。

3. 「光速度一定性」の根拠

アインシュタインは如何にしてこの仮定に到達したかは、あまり明らかではない。今から見れば、その論理的根拠は次のようにいえる。

電磁気学のマクスウエル方程式から、電磁波 (光) の方程式が導かれ、電磁波の伝播速度は c であることが帰結される。電場 E の真空中の伝播方程式は

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{c^2}\right)\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0$$

となり、磁場 B についても同様。最後の時間微分の項の係数 c が光速度を与える。この c は普遍定数である。運動の相対性の仮定から、全ての慣性系は同等であり、マクスウエル方程式が成り立つので、同じ伝播方程式が導かれ、光速度は c となる。

それゆえ、すべての慣性系は物理的に同等であるという、運動の相対性の仮定と、電磁気学のマクスウエル方程式を前提とすれば、**すべての慣性系でマクスウエル方程式が成り立ち、光速度は必然的に同一の c となる。**

「相対性理論は間違っている」という主張をよく見かけるが、その説明に運動の相対性とマクスウエル方程式を前提にしているので論理的に矛盾している。ここで「光速度一定性」の論理的根拠を指摘しておきたい。

4. 座標変換に対する理論の不変性

特殊相対性理論では、すべての慣性系は物理的に同等であり、LT により結ばれる。座標変換の下での理論の不変性 (方程式の共変性) は、その理論の客観性を増す。基礎方程式はその理論の性格 (論理性) を表現している。その理論の性格を決めるのは座標変換の下での「不変量」である。

- ニュートン力学では、不変量は「空間距離と時間」: ガリレイ変換
- 特殊相対性理論では、不変量は「4 次元距離 (ミンコフスキー空間の世界線)」: ローレンツ変換。

しかし、慣性系はまだ特殊であり、その選択は人為的である。自然法則は本来、人間の認識の仕方、理論を組み立てる基準系の選び方によらず存在している。それゆえ、より一般的な基準系を基に理論を築くべきである。そこで任意の座標系、一般座標系に進んだ。

- 一般相対性理論では、不変量は「4 次元リーマン空間の距離」: 一般変換

座標変換の下での**不変量を決めることで、変換の型が決まり、理論が決まる**。この**不変量の規定に物理が入る**。時間・空間の性質 (幾何学的性質、計量) はこの不変量によって規定される。したがって、**時空の構造は理論と共にその中で決まる**。

5. 物理量の数量化

物理量 (数量化) が客観的に定義されるためには、次の同値関係と順序関係を満たさねばならない。

同値関係　反射律: $a \sim a$, 対称律: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, 推移律: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
順序関係　反対称関係: $a \geq b, b \geq a \Rightarrow a = b$, 推移律: $a \geq b, b \geq c \Rightarrow a \geq c$

同値関係の対称律は 2 人の間での同値関係 (どちらから見ても同値)、推移律は 3 人以上の人の間での同値関係を与えるから、客観的等値を保証する。順序関係についても同様。

以上の条件を充たす物理量は全ての人に普遍的かつ客観的に決められたといえる。たとえば、長さ $1m$ といえばどこででも通用する。ところが、相対性理論では、互いに相対運動をしている物体間では、慣性系ごとに時空尺度が異なるので、この関係が崩れる。等しい長さの棒の長さでも互いに相手の棒の長さは短く観測されるからである。時間 (同時性、遅れなど) についても同様。しかし、**一つの慣性系で (に変換して) 比較すれば、同値関係と順序関係は満たされる**。また、異なる慣性系間の物理量は LT により一義的に変換される。それゆえ、客観的数量化はでき、矛盾のない理論が組み立てられる。

6. 変換群の意義

物理学での座標変換は「群」を作っている。変換に対する「不変量」があるから、それを不変にするすべての変換は一つの変換群に括れる。

群の定義: 恒等変換 (単位元)、逆変換 (逆元)、結合変換 (2 つの積元) を含む集合。

これらは、同値関係の反射律、対称律、および推移律にそれぞれ対応している。恒等変換はそれ自身への変換であり、逆変換は座標系間の相対性を、結合変換は引き続く 2 つの変換が 1 つの変換で表されることを意味する。

変換が群を作ること、すなわち逆変換が存在すること、および、2 つの変換の結合が同じ性質の 1 つの変換で表されることは、**すべての座標系が同等であることを保証**している。その理由をローレンツ変換群を例にとり説明する。慣性系 K_1 から LT_1 で第 2 の慣性系 K_2 に移り、次に K_2 から LT_2 で第 3 の慣性系 K_3 に移ったとすると、K_1 から K_3 に直接移る変換も 1 つの LT_3 である (その逆変換も)。ここに $\mathrm{K}_1 \cdot \mathrm{K}_2 = \mathrm{K}_3$。したがって、どの慣性系から LT で移ってもまた慣性系となる。それゆえ、全ての慣性系が同等であることが保証される。

もしそれらが群をなさなければ、LT_1 と LT_2 は LT であっても、LT_3 は必ずしも LT ではないことになり、どの座標系から移ったかにより行き先の座標系が慣性系であるとは限らないことになる。したがって、その場合はすべての慣性系の同等性は失われる。

座標変換が群を作るなら、客観的物理量の定義に必要な条件 (同値関係) との対応からして、その変換が客観的意味を有することにもなる。

変換群を用いて、いろいろな特性が導かれる。例えば、LT 群から、速度の合成則が導ける。一般相対性理論でも 4 次元時空のリーマン空間での線素を不変にする変換は群を作るから、このことは**任意変換 (ただし微分可能で逆変換が存在) で移る座標系がすべて同等の資格を有することを示す**重要なポイントである。

7. 電磁場から重力場へ

アインシュタインは特殊相対性理論で電磁気学を完全な形式にし、場の概念を確立した。重力も重力場による近接作用として定式化に向かった。

慣性系は特殊であり、人為的系であるから、一般の基準系で成り立つような理論が望ましい。また、エネルギーと慣性質量の同等性から、電磁場のエネルギーも重力の源になりうる (等価原理を認めるなら)。すると、電磁場だけでは不十分で、重力場を取り込んだ理論が必要になる。

特殊相対性理論は不完全→一般相対性理論へ。

8. 等価原理

慣性質量 M_i と重力質量 M_g の同等性＝等価原理が問題になる。等価原理は、原理的にはガリレイの落下法則 (真空中で、すべての物体は重さによらず同一加速度で落下) の中にすでに含まれていた (精度が問題だが)。すべての物体に対して、

$$\frac{M_i}{M_g} = \frac{M_i'}{M_g'} = \cdots = K \text{ (一定)}$$

ならば、単位を巧く決めれば、$K = 1$ (等価原理) としうる。もし、等価原理が成り立たなければ、重力による運動現象に矛盾が起こる。なぜならば、質量が M_i, M_g の物体の落下で、その物体に仕切 (仮想的) を入れ (あるいは実際に割って)m_i, m_g と m_i', m_g' に分けたとする。等価原理が成り立たないなら、

$$\frac{m_i}{m_g} = k, \quad \frac{m_i'}{m_g'} = k', \quad \frac{M_i}{M_g} = K$$
$$\therefore \frac{m_i + m_i'}{k m_i + k' m_i'} = K$$

上式は $k \neq k' \neq K$ なら矛盾。

また、落下加速度は、ニュートンの運動方程式を使うと、(重力を G とする)

$$\alpha = \frac{m_g G}{m_i} = \frac{G}{k}, \quad \alpha' = \frac{m_g' G}{m_i'} = \frac{G}{k'},$$
$$A = \frac{M_g G}{M_i} = \frac{G}{K}$$

となり、物体を一つと見るか、2 つと見るかで、加速度が異なり矛盾をきたす。切り方は任意であり、2 つ以上何個にも切れる。全ての切り方に対して矛盾のないようにすることは難しい。

よって、**等価原理がないと、矛盾のない力学の定式化は非常に複雑困難になる**。あるいは不可能かもしれない。

第 2 部 重力と曲がった時空

9. 重力の幾何学化の根拠

質量に関する等価原理は、すべての物体はその質量や化学的性質などによらず重力によって同じ加速度を受ける、つまり、初期条件さえ同じなら全ての物体は同一軌道を運動することを意味する。落下法則は質量の大きさによらず全て同一加速度で落下するから、それを一般化して等価原理を次のように表現しうる:

$$\text{静止系における一様重力場} = \text{無重力の等加速度系}$$
$$\text{加速度による見かけの力 (慣性抗力)} = \text{重力}$$

非一様な任意の重力場は、場所ごとに加速度の異なる「局所加速度系」の結合系 (曲線の集合) で表現可能、すなわち曲がった空間で表現される。

$\therefore$ 重力作用の効果は物体の一切の性質に関わりなく発現するから、重力は物体を離れて空間の構造 (性質) に帰すことができる: 重力の幾何学化。

10. 重力理論は非線形理論

特殊相対性理論のエネルギーと慣性質量の同等性により、電磁場、重力場のエネルギーは慣性質量と同等である。等価原理によりそれは重力質量を生む。したがって、**重力場はそれ自身が重力の源となって重力質量に跳ね返ってくる**。**重力は重力と相互作用する**。 よって、重力場は非線形性を持った場であり、重力理論は非線形理論となる。アインシュタインの重力場の方程式:

$$R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}R}{2} = T^{\mu\nu}(\mu, \nu = 0 \sim 4) \tag{1}$$

$R^{\mu\nu}$ は μ, ν につき対称でリッチのテンソル、R はスカラー曲率と呼ばれて、ともにリーマン空間の曲率と密接に関係している。$T^{\mu\nu}$ は物質分布を与えるエネルギー・運動量テンソルである。$R^{\mu,\nu}$ と R は計量テンソル $g^{\mu\nu}$ とその 1 回微分、2 回微分のみの非線形関数であり、$g^{\mu\nu}$ だけで決まる量である。左辺は時空間のみで決まる量、右辺は物質 (エネルギー・運動量) 分布のみで決まる量である。

11. 入れ物 (時空) と中味 (物質) の相互規定性

重力方程式 (1) は時空の計量 $g^{\mu\nu}$ と物質分布 $T^{\mu\nu}$ の関係を与える式で、$T^{\mu\nu}$ が決まれば $g^{\mu\nu}$ が決まり、$g^{\mu\nu}$ が決まれば物質分布 $T^{\mu\nu}$ が決まる。

時空間の構造は $g^{\mu\nu}$ で決まるから、物質の入れ物である時空間と中味の物質分布とは相互に依存して決まり、それらの運動変化も相互依存的である。つまり、時空構造と物質分布は相互規定的関係にあり、両者は持ちつ持たれつの関係で自己運動する 1 つのシステムである。時空間の歪みが重力であるから、その時空間の構造によって中の物質が運動し、その物質分布の変化が時空の構造 (歪み) に跳ね返って時空が変わる。その時空変化がまた物質の運動に跳ね返る。しかし、この変化過程は、いずれが原因で他方が結果というのでなく、同時的で、どちらも原因でもあり、また結果でもある。つまり、同時的に相互規定に関係にある。宇宙はそのような自己運動系である。このように時空と物質を不可分な相互前提的存在とし、かつ相互規定的存在様式とする物理学の定式化は、一般相対性理論が最初である。

12. ゲージ不変性と「穴の議論」

重力方程式 (1) は 10 個の方程式を与え、それらは一般変換に対して共変的である。10 **個の式の中、**6 **個のみが** $g^{\mu\nu}$ **時間についての** 2 **回微分を含み、他の** 4 **個は時間の一回微分しか含まない**。

(1) 式の左辺を纏めて $G^{\mu\nu}$ と書くと ($i,j=1,2,3$ は空間成分, 0 は時間成分)

$$G^{ij} = (\ g^{ij} \text{ の時間の 2 回微分}, g^{\mu\nu} \text{ の時間の 1 回微分}, \cdots) \text{ 函数},$$
$$G^{\mu 0} = (g^{\mu\nu} \text{ の時間の 1 回と空間の 1 回微分} \cdots\ ) \text{ の関数}$$

それゆえ、$g^{\mu 0}$ の時間の 2 回微分はこの方程式に含まれない。力学では、運動方程式は時間の 2 回微分の方程式である。これに対して、時間の 1 回微分の方程式は速度と位置の関係を与える条件式、すなわち、初期条件に対する束縛条件であって、運動方程式ではない (例: ニュートンの運動方程式)。$g^{\mu\nu}$ に対しても同様。したがって、重力方程式のうち 6 **個の** G^{ij} **のみが本当の運動方程式であり、**4 **個は初期条件に関する束縛条件**なのである。すると、重力方程式で運動が決まるのは 6 個の g^{ij} のみであって、g^{μ} は決まらない。10 個の計量 $g^{\mu\nu}$ を決める運動方程式は 6 個しかないので、計量は一義的には決まらない。4 個の $g^{\mu 0}$ は任意に選べる。10 個の式が独立な運動方程式でないことは、ビアンキイの恒等式というのがあり、(1) 式の左辺の共変微分 (絶対微分) は恒等的にゼロになる。その恒等式は 4 個 (4 成分) あり、それらは $g^{\mu\nu}$ に対する 4 個の条件式を与えるのである。(1) 式の左辺が恒等的にゼロならば、右辺もゼロでなければならない。右辺 $T^{\mu\nu}$ の共変微分がゼロであることは、エネルギー・運動量の保存則である。 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が一義的に決まらないという、このことが一般共変性を満たす根拠である。つまり、任意関数を含む座標変換を許す理由である。

基礎方程式が運動方程式として全てが独立でなく、束縛条件を含む場合、その方程式系を特異系という。特異系であり、かつ任意変換に対して方程式系が不変なものをゲージ変換に対して不変 (ゲージ不変) であるといい、そのような理論をゲージ不変理論 (ゲージ理論) という。重力方程式 (1) はゲージ理論であり、4 **つのゲージ変換の自由度を有し**ている。ゲージ不変な方程式の解は一義的でなく、不定な成分がある。この場合、束縛条件に矛盾しなければ 4 **つの** $g^{\mu 0}$ **は任意**に与えることができる。1 組の解に対して、ゲージ変換で繋がる全ての解の組は物理的に同等なのである。計量 $g^{\mu\nu}$ (重力ポテンシャル) そのものには物理的意味はなく、本当の物理的状態を与えるのはその微分である。これが、アインシュタインが一般相対性理論を築く過程で、陥った誤り、重力理論は一般共変性を充たさないという、いわゆる「穴の議論」に填った理由である (これは後で分かったこと)。当時、彼は計量テンソルは一義的に決まらなければならないと思いこんでいた。

よく知られたゲージ理論は、電磁気のマクスウエル方程式である。電場 E と磁場 B は電磁ポテンシャル $A_\mu(x)$ の 1 回微分で表される:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}, \quad F_{0i} = E_i, \quad F_{ij} = B_k$$

この $F_{\mu\nu}$ は任意変換

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial K}{\partial x_\mu}: \quad K \text{ は } x \text{ の任意の関数} \tag{2}$$

で変わらない。したがって、E と B に関するマクスウエル方程式も不変である。つまり、マクスウエル方程式を解いてポテンシャル A_μ を求めても、A_0 は決まらず任意性がある。物理的に意味のある物理量 (観測に掛かる量) はポテンシャル A ではなく、電場 E と磁場 B であるから、ゲージ変換 (2) で物理的内容は変わらない。

13. 真空の物質性

特殊相対性理論は真空のエーテルを追放し、空の空間を電磁波が伝わる「物理的場」としたとよく言われる。しかし、空の空間がどうして物理的場となりうるのか、その疑問に対する答えはなかった。一般相対性理論では、真空、すなわち物理的空間は「場」であり、電磁場や重力場の担い手として、単なる空虚な空間ではない。空間はその歪みによってエネルギー・運動量を有する存在であるから、物質的存在である。

さらに、場の量子論では、真空の物質性は一層強くなる。特殊相対性理論は真空からエーテルを追放して空にしたが、量子論と結合して真空を粒子・反粒子対で埋め尽くし、真空に物質性を与えた。このような真空は、電磁波を伝える物理的場となりうるだろう。

また、相互作用の統一理論では、真空をヒグス場の縮退した空間 (真空の相転移) とした。このように、相対性理論は、真空概念にも革命的変化をもたらした。真空概念の発展史は、物理学理論の発展史でもある。

14. アインシュタインの統一場

重力場の幾何学化に成功したアインシュタインは、電磁場と重力場を統一して、両者を空間の構造に填め込もうとした。その思想を実現しようと、多くの人たちが試みたが、遂に成功しなかった。その理由の一つに、電磁場には等価原理に当たるものがないことである。

アインシュタインの試みた統一場理論は成功しなかったが、全く異なる方面から、量子場の理論に基ずく基礎的相互作用の「統一理論」が起こり、一部成功した。ワインバーグ・サラムの弱電統一理論がそれである。

重力まで含めた統一理論は非常に難しいが、いずれ成功するであろう。アインシュタインの統一的自然観への思考法は素晴らしいものである。

以上