落下法則
―古典力学の誕生と数学―

伊藤　和行

今日我々は、ガリレオの落下法則の発見から近代科学は誕生し、その定式化は、自然現象に対して数学的分析を加えた最初の試みともいうべきものであり、それ以後の物理学、さらには近代科学の方法論的モデルとなったと考えている[1)]。ガリレオの後、17 世紀後半にニュートンの『プリンキピア』において基礎を築かれた古典力学は、18 世紀後半にはオイラーらによって解析化され、ラグランジュの『解析力学』において解析力学という姿を得ることになる。そこで、ラグランジュは、それまでの力学の発展を振り返り、動力学の核心である加速力の理論を最初に扱ったのはガリレオであって、彼は重力という物体に絶えず働く力が一定である場合について考察したと述べている[2)]。落下法則は、ガリレオ以後の加速運動の数学的分析の出発点となり、ホイヘンスによる遠心力の定式化や、ニュートンによる中心力の作用を受ける物体の運動理論はその一般化だったのである。さらに 18 世紀の科学者たちは、座標系を用いて中心力に限られない様々な問題を扱う一般的方法へと展開した。

このようにガリレオの落下法則は、近代力学の理論的出発点だったが、彼の試みはそれまで数学的規則性が問題とされてこなかった分野に初めて数学を適用しようとしたものであったために、速度の数学的表現をめぐって問題を含んでいた。以下で検討するように、ホイヘンスとニュートンは落下法則を加速運動の分析の出発点とした一方で、彼らの数学的技法はガリレオのものではなく、ガリレオの証明を自らの技法によって書き換えていったのである。

１．ガリレオ―『新科学論議』における落下法則の証明}

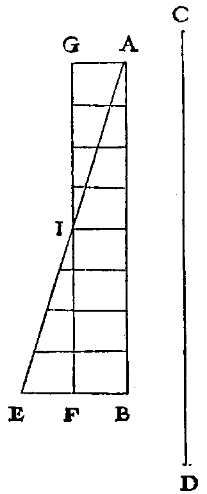
ガリレオは『新科学論議』（1638）において、一様加速運動の定義か

ら、最初の２つの定理によって、落下法則―― t^2 法則＝通過距離は通過時間の平方に比例する――を数学的に導出している。

まず定理１において一様加速運動が等速運動に還元され、それから定理２において t^2 規則が導かれていた。定理１は「中間速度定理」（Mean Speed Theorem）と呼ばれ、中世後期の「マートン規則」の影響を受けたものとしばしばみなされてきたが、その証明には、彼が加速運動を数学的に扱う際に抱えていた問題が反映されている[3)]。定理１は次のようなものである。

> 可動体がある距離を静止からの一様加速運動によって通過する時間は、同じ可動体が同一の距離を、その速さの度合が先の一様加速運動の最大かつ最終の速さの度合の半分であるような均等運動で通過する時間に等しい[4)]。

現代的に述べれば、等しい時間では、静止からの一様加速運動による通過距離は、その最終速度の半分の速度でなされる等速運動による通過距離に等しいということである。ガリレオは、各瞬間における速度を表す概念として「速さの度合」を用いているが、これは平均速度の時間的極限としての瞬間的速度のように距離との数学的関係を持っておらず、このことが彼の証明に問題を引き起こしている。彼の証明過程を図に従って辿っていこう。



可動体が距離 CD を C における静止から出発して一様加速運動によって通過する時間を AB とし、最大かつ最終の「速さの度合」を BE によって表す。一様加速運動における各瞬間の「速さの度合」は、三角形 ABE 内の、線分 BE に平行な直線で表され、一方最終の「速さの度合」BE の半分の速度による一様運動における各瞬間の「速さの度合」は長方形 ABFG 内の平行線によって表される。ここで三角形の平行線の「集まり」は長方形 ABFG 内の平行線の「集まり」に等しい。前者は一様加速運動に

おいて費やされる「速さの度合」に対応し、後者は一様運動において費やされる「速さの度合」に対応するので、２つの運動において等しいだけの「速さの度合」が費やされることになる。よって、両者において通過する距離は等しい。

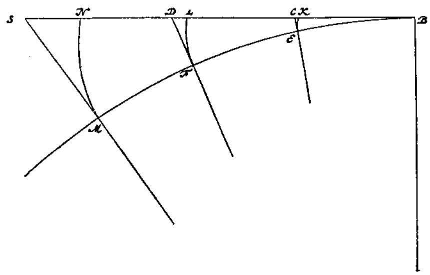
この証明において注意しなければならないのは、三角形や長方形の面積が距離を表すとか、面積の比が距離の比に等しいとか、距離が図においてどのように表されるかといったことがまったく述べられていないことである。これは、ガリレオは加速運動において「速さの度合」と通過距離を数学的に関係づける手だてを持っていなかったことの反映だった。ガリレオは２つの図形の対応関係を論じるに当たって、底辺に平行な無数な線分の対応を考えているが、それは、当時「不可分者」（indivisibilis）と呼ばれていたものである[5)]。「不可分者」は２つの図形の面積を比較する際に用いられた概念で、２つの図形において対応する「不可分者」すなわち線分がすべて等しいとき、両者の面積は等しくなり、またすべての「不可分者」が同一の比を持つときには、面積も同じ比を持つことになる。さらに彼は一様加速運動における瞬間的速度すなわち「速さの度合」を「不可分者」によって数学的に表現したが、この概念によっては「速さの度合」を距離と数学的に関係づけることができなかった。平面図形における「不可分者」は線分であり、無数の線分を集めても、線分には幅がない以上、有限な面積を構成することはできない。運動では、瞬間には幅がない以上、瞬間的速度を集めても、有限な距離は構成されないのであって、面積が距離を表すとみなし得る根拠が見出されなかったのである。

以上のような理由から、「中間速度定理」の証明では、「速さの度合」と距離との関係には言及されず、また距離を表すものとして線分 CD が提示される一方、三角形 ABE や長方形 ABFG の面積との関係にはまったく触れられなかったと考えられる。このガリレオの落下法則の証明における問題は、それが加速運動の数学的な分析というまったく新しい試みであったことを指し示していると言えよう。ホイヘンスやニュートンらは、加速運動を論じる際にガリレオの落下法則を出発点にしつつも、同時に彼らはガリレオの証明の問題点にも気づいていた。

２．ホイヘンス－『振子時計』における落下法則と遠心力

2.1　遠心力の定式化

ガリレオの数学的運動論を最初に理解し発展させたのは、ホイヘンス（Christiaan Huygens, 1629-95）である。ホイヘンスは、力学史の上では遠心力の定式化やサイクロイド振子の等時性の発見によって知られているが、それらの考察の出発点となっていたのはガリレオの落下法則だった。彼は、『遠心力論』（*De vi centrifuga*, 1703）において、遠心力の大きさが速度の平方に比例し、半径に反比例することを導出したが、その際に、円運動を落下運動に還元し、落下法則を適用している。すなわち微小時間における円運動を放物線運動に近似し、接線からの円軌道の逸れが時間の２乗に比例することを導き、それより、その逸れを物体の落下距離とみなすことによって、円運動をする物体には、落下運動のように一定の大きさの運動力が働いていると考えたのである。

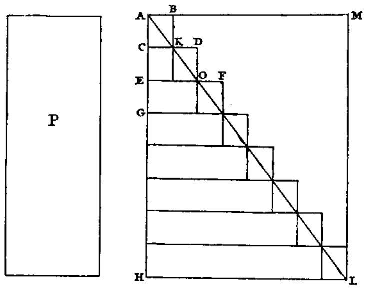


図において、等速で回転している円盤上にある球が B において切り離されるとする。微小な等時間間隔において球は等しい弧 BE、EF、FM を通過し、接線からは、弧 EK、FL、MN だけ離れていく。微小な場合には、それらの距離は、１から始まる平方数列１、４、９、16 に従って増大するとみなされ、したがって物体は一様加速運動によって接線から離れて行くと考えられる。

次いでホイヘンスは遠心力の大きさが、速度の２乗に比例し、半径に反比例することを導き、さらに遠心力の大きさを重力によって評価している。すなわち、円周上を運動する際の速度が、その直径の４分の１の高さを落下したときに獲得する速度に等しいならば、その遠心力は物体の重さに等しいのである。彼は、遠心力の大きさを測る尺度として重力を用いるのであるが、この試みは逆に円錐振子の周期を用いることによって重力の大きさを測ることを可能とした。

2.2　『振子時計』における落下法則の証明

ホイヘンスは、『振子時計』（*Horologium oscillatorium*, 1673）の第２部「重い物体の落下とそれらのサイクロイド上の運動について」（“De descensu gravium et motu eorum in cycloide”）では、振子において厳密に振幅によらずに等時性が成立するのは錘りがサイクロイド曲線を描くときであることを、曲線上の下降を一連の異なる傾きの斜面上の下降として考えることによって証明している。そこでの議論の出発点も落下法則だったが、ホイヘンスはガリレオの証明には満足せず、「中間速度定理」をガリレオとはまったく異なる方法で証明している。その証明では、ガリレオの証明におけるように時間と速さの図が描かれ、さらに図の面積が距離を表すとはっきりと述べられている。さらにホイヘンスは「不可分量」の概念を用いずに、アルキメデスにならって「取り尽くし法」と背理法を組み合わされた方法を用いていた。



図において縦軸が時間、横軸が速さを表すときに、図形の面積は通過された「距離の量」を表している。ここでホイヘンスは加速運動による通過距離の量を表す長方形Ｐの面積が三角形 AHL の面積に等しいことを背理法を用いて証明する。すなわち長方形Ｐが三角形 AHL よりも小さいと仮定しても、大きいと仮定しても矛盾が導かれることを示すのである。そのために落下時間を等分し、各時間間隔内では一様運動が行われると考える。図において、縦辺を時間間隔とし、横辺を速さとすると、それらから作られる長方形の面積は、その時間間隔内に一様運動によって通過される距離を表している。三角形の面積は外接長方形の面積の和よりも小さく、内接長方形の面積の和よりも大きいことから、背理法によって長方形Ｐの面積が三角形の面積に等しいことが証明され、よって一様加速運動における通過距離は三角形の面積によって表されることが導れている。

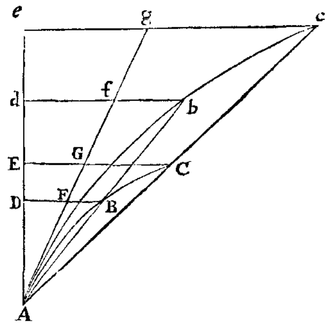
このホイヘンスの証明は、落下時間を多数の時間間隔に等分し、その間では、速度は一定であるとみなし、等速運動と仮定することによって、通過距離を長方形の面積の和で表現するものである。ホイヘンスは、ガ

リレオの「不可分者」による証明が抱えていた問題を巧みに避けて、区分求積法の先駆とみなせる方法によって「中間速度定理」の証明を行ったと言えよう。

３．ニュートン―『プリンキピア』における中心力の理論

3.1　加速運動の数学的取り扱い

ニュートンは、『プリンキピア』（1687）において、３つの運動法則と万有引力によって、惑星の軌道運動から地上の物体の落下運動まで、物体の運動を統一的に説明したことが知られている。しかし彼が実際に物体の加速運動を扱った際には、我々が行うように各座標に対して運動方程式を立て、それを積分することによって軌道を求めたわけではなく、ガリレオの落下法則を出発点としていた。ニュートンによれば、地球に働く太陽の万有引力のように、物体に働く運動力が変化するものであっても、微小時間においては力は不変であるとみなされるので、運動は一様加速運動となり、ガリレオの落下法則が成り立つのである[8)]。



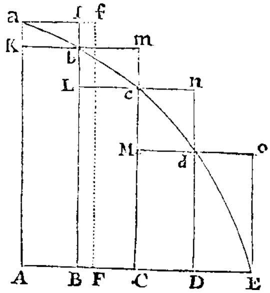
微小時間では、運動力がいかなるものであっても通過距離は微小時間の２乗に比例することを証明する際に、ニュートンは、時間を線分 AD、AE によって、速さを縦線 DB、EC によって表わすと、これらの速さによって描かれる距離は、これらの縦線によって描かれる面積 ABD、ACE に比例するとはっきり述べている。時間が微小となるとき、すなわち点 B、D が点 A へ近づくときには、二つの図形 ABD、ACE の面積の比は三角形 ABD と ACE の面積の比に近づき、よって AD、AE の２乗の比に近づいていく。

ニュートンは、この微小時間における通過距離と時間の関係を、一般的な力の作用下の運動の軌道を求める際の基礎定理としたのだった。ニュートン自身、この定理を含め、慣性法則や運動の分解と合成といった自分の理論の多くをガリレオに負っていることを認めている。

3.2　極限概念「最初と最後の比」

ニュートンは、前節で扱った、微小時間における通過距離は微小時間の２乗に比例することの証明では、「不可分者」の概念ではなく、「最初と最後の比」（ratio prima et ultima）という一種の極限概念に用いている。「最後の比」は次のように運動論的に定義されている。

> 任意の有限の時間においてつねに等しくなろうとし、その時間の終わりの前に任意の与えられた差よりも互いに近づく量、また同様にそれらの量の比は最終的には等しくなる[9)]。



さらにニュートンは、曲線と直線によって囲まれた図形の求積を求める際にも「最後の比」を用い、図形を複数の長方形の面積の和で近似していた[10)]。図のように、求める図形の底辺を分割し、内接する長方形と外接する長方形を作る。このとき求める図形の面積を S、内接する長方形の和を S_{in}、外接する長方形の和を S_{out} とすると、

$S_{in} = \square\, AKbB + \square\, BLcC + \square\, CMdD$

$S_{out} = \square\, AalB + \square\, BbmC + \square\, CcnD + \square\, DdoE$

分割を無限に多くし各長方形の幅が無限に小さくするとき、最終的には $S = S_{in} = S_{out}$ となる。

面積が求められねばならない図形の底辺を等分し、各区間の上に作られる長方形の面積の和を考えると、分割数を増やすのにしたがって、曲線図形の面積と長方形の面積の和の誤差は減少していく。分割数を無限に大きくした極限では、内接長方形の面積の和と外接長方形の面積の和、そして曲線図形の面積の間の比すなわち「最後の比」は１になり、それらの面積は互いに等しくなるのである。さらにニュートンは、古代ギリシアの「取り尽くし法」も「不可分者」も用いずに、この「最初と最後の比」だけを用いると明確に述べている。彼は、古代ギリシアの方法を尊重したホイヘンスとは異なり、極限概念を積極的に用いて微積分の問題にアプローチしていったのだった。

4．結論

前節までで論じたように、ホイヘンスとニュートンは落下法則を加速運動の理論的考察の出発点としていたが、新たな数学的技法を導入することによって、ガリレオの証明を書き換え、「不可分者」の理論が抱えていた問題点を克服した。この結果、ガリレオの運動論の最も重要な成果である落下法則が受け継がれていった一方で、その導出に際して用いられた数学的技法が捨てられたのである。ホイヘンスとニュートンは、落下法則をもっとも単純な加速運動である一様加速運動の理論として、より一般的な加速運動を分析する際の理論的基礎と捉えており、落下法則は彼らの理論体系の中で新たな理論的意味を与えられたのだった。

以上のようにホイヘンスの遠心力の理論、ニュートンの万有引力下の運動の理論は、ガリレオの一様加速運動の理論の一般化として捉えられる。すなわち落下運動では、運動力の大きさも方向も一定である重力を扱われたのに対して、ホイヘンスの遠心力の理論では、大きさは一定だが、方向がある一点に向かって一様に変化する力（中心力）が論じられ、ニュートンの万有引力の理論では、大きさも中心からの距離に従って変化する中心力が扱われていたのである。最初に触れたラグランジュだけでなく、18 世紀の中頃のダランベールもそれまでの力学の発展をこのように記述しており、当時としては一般的な考えだったと考えられる[11)]。

注

1）17 世紀科学革命に関しては、ウェストフォール『近代科学の形成』、渡辺正雄・小川真里子訳、東京、みすず書房、1980 参照。また近年のガリレオ研究の状況に関しては、Machamer, P., ed., *The Cambridge Companion to Galileo*, Cambridge: Cambridge University Press, 1998 参照。

2）Lagrange, *Mécanique analytique*, Paris, 1788 (Paris: Gabay, 1989), pp.158-9. 17 世紀の力学史に関しては、Blay, M., *Les raisons de l'infini. Du monde clos à l'univers mathématique*, Paris: Gallimard, 1994 参照。

3）この定理が「マートン規則」に起源を持つものとは考えがたい。第一に、「中間速度定理」では、中間値として最終の「速度の度合」の半分が取られているが、「マートン規則」では、通過時間の半分が取られる。すなわち中間値として取られるのは、ガリレオでは「強度」の半分であるのに対し、「マートン規則」では「延長」の半分である。第二に、「中間速度定理」が現れるのは『新科学論議』においてであり、それまでは、『天文対話』

も含めて「二倍距離定理」（最終の「速度の度合」で等速運動によって通過される距離は、一様加速運動の場合の２倍になる）が一貫して用いられていた。Cf. Sylla, E. D. , “Galileo and the Oxford *Calculatores*: Analytical Languages and the Mean-Speed Theorem for Accelerated Motion,” in W. A. Wallace, ed., *Reinterpreting Galileo*, Washington, D.C.: The Catholic University of America Press, pp.53-108.

４）Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, in *Le opere di Galileo Galilei*, a cura di A. Favaro, Firenze: Giunti, Quarta edizione, Firenze: Giunti, 1968, Vol. 8, pp. 208-209.

５）「不可分者」の概念については、ガリレオの弟子であるカヴァリエリが、『不可分者による連続体の幾何学』（1635）において体系的に論じていた。両者はこの概念に関して書簡の中で見解を交換している。Cf. Andersen, K., “Cavalieri’s Method of Indivisibles,” *Archives for History of Exact Sciences*, 31 (1985), pp. 291-367.

６）Huygens, *De vi centrifuga*, in *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, 22 tomes, Hague, 1880-1950, Vol. 18, pp.265-267.

７）Huygens, *Horologium oscillatorium*, in *Oeuvres complètes de Christiaan Huygens*, Vol. 18, pp.137-141. アルキメデスの方法については、佐藤徹「アルキメデス―『円の計測』と『螺線について』―」、彌永昌吉・伊東俊太郎・佐藤徹『数学の歴史Ｉギリシアの数学』、東京、共立出版、1979、第３章、pp.163-248。

８）Newton, *Principia mathematica philosophiae naturalis*, 3rd edition,1726; A. Koyré and I. B. Cohen, eds., Cambridge, Mass.: Harvard Univeristy Press, 1972, pp.80-81.

９）Ibid, p. 73.

10）Ibid., pp. 73-74.

11）ダランベールは『百科全書』の項目「力学」において力学の発展について次のように述べていた。

> オランジュ公の数学者ステヴィンに力の合成の原理を負っており、後にヴァリニョンがそれを機械の釣合に巧みに適用した。ガリレオには加速の理論を、ホイヘンス、レン、ウォリスに衝突の法則を、またホイヘンスに円における中心力の法則を、ニュートンにはこの法則の他の曲線と世界体系への拡張を、そして最後に今世紀の数学者に力学の原理を負っている。（d’Alembert, “Mécanique,” in *Encyclopédie, ou dictionnaire reisonné des sciences, des arts et des métiers, ...*, Paris, 1751-1772; repr. (CD-ROM), Paris: Redon, 1999.

（京都大学大学院文学研究科助教授）