

Leonhard Euler による古典力学の解析化

中田 良一

1. 序

17 世紀に Isaac Newton のプリンキピアにおいて定式化された運動法則と、現在の「ニュートン」力学の運動法則の間には、形式的にも概念的にも大きな隔たりがある。前者から後者への移行の最初の試みは 18 世紀前半に Daniel Bernoulli (1700-1782)、Leonhard Euler (1707-1783)、Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)、Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 等により種々の方法で行われ、最終的に Euler により提出された試みが現在に繋がることとなる。

この様な 18 世紀前半における、Newton による運動の取り扱いを更に一歩進めようとする試みに関する研究は、現在のところきわめて少ないと言わざるを得ない。ここで、2 つの先行研究を簡単に紹介しよう。

最初に、John T. Cannon と Sigalia Dostrovsky は著作の序文の中で¹⁾、18 世紀前半の力学の特徴を次のように述べる。18 世紀前半に主として研究対象になっていたのは 1 次の自由度を持つ力学系であり、多くの自由度を持つ力学系の研究は発展途上にあつた。現代の力学から見れば、1 次の自由度を持つ系から、多自由度を持つ系への解析の拡張は、単なる次元の拡張に他ならないが、当時ではこの 2 つの系は概念的に異なるものであつた。

更に、現在 Newton の第 2 法則として理解されている法則が当時どの様に理解されていたかという問題が、これに加わる。Newton 自身がプリンキピアにおいて与えた運動の第 2 法則は数式で書かれたものではなく、18 世紀の上記の 4 人の研究者たちが用いた、数式で書かれた、いわゆる Newton の第 2 法則 $f dt = dv$ (f : 力、 v : 速さ) も、果たして Newton がプリンキピアで述べた運動の第 2 法則を数式化したものであると当時考えられていたかも疑わしい²⁾。そして、1 次の自由度を持つ

力学系に対してさえも、関係式 $f dt = dv$ は今日理解されているように、すべての運動に適用できる普遍的原理とは考えられていなかった。

それ故、個々の問題に応じて関係式 $f dt = dv$ 、保存則（特に活力保存則）を用いる解法、17世紀的な幾何学的解法等の解法が使い分けられた。Cannon と Dostrovsky は特に、多自由度力学系の典型例として18世紀前半において研究された弦や棒の振動運動を取り上げ、幾つかの仮定の元、当時の研究者たちが、これらの未解析の運動を当時よく知られていた単振り子の運動にどの様に還元したかを探求した。

2番目の先行研究として、Giulio Maltese の研究を挙げることができる³⁾。彼は Cannon と Dostrovsky の研究を踏まえ、18世紀半ばまでは、多くの自由度を持つ、広がりを持つ剛体や弾性体の運動を、以前から知られていた質点の力学に還元して論じようとする述べる。この際、18世紀の研究者たちは（活力ならびに角運動量の様な）保存則や、振動中心等の特別な力学的性質を持つ物体中の点を用いる。ところがこの様な諸研究の中から18世紀半頃に、Euler による現代的な物体の運動に関する微分方程式を用いる解法が始まる。Maltese は前者の解法から後者の解法への変化を18世紀前半の力学の特徴とする。

更に、Maltese は18世紀における力学問題解法の変化として、直交座標系の採用について触れ、次のように述べる。

[物体] 固有の座標系（すなわち与えられた曲線の各点の接線と法線 [よりつくられる座標系]）からデカルト直交座標系（これは1740年代に生じた）への変遷を単なる形式的な変遷と見なすことはできず、運動の第2法則の様な原理は普遍的であり、それ故広がりを持つ物体の微分方程式を得るため、物体のすべての要素に適用できることを Euler が認識する助けとなったと見なすことができる⁴⁾

本論文では、1740年代に生じた直交座標系の採用により引き起こされた、力学の性格の変化に焦点を当てる。Euler は1740年代に話題となった、質点を含む管の回転運動について一連の論文を発表した。それらの論文は2つに大別することができる。一つは、この運動を伝統的な幾何学的テクニックを用いて解く手法であり、もう一つは静止空間に固定された直交座標系を用いて管と質点に関する運動方程式をたて、解く

手法である。直交座標系を用いた力学の解析化により、運動の第2法則 (それが Newton のプリンキピアにある運動の第2法則に由来すると Euler が認識していたかどうかは別であるが) が、原理としての地位を確立していくことを見る。更に、この解析化により、力学は事前に予測できない実り豊かな結果をもたらすことを強調する。

2-1 . 質点を含む管の回転運動に関する幾何学的解法

1741年の Johann Bernoulli への手紙の中で Euler により提出された、質点を含む管の回転運動の決定という問題は、当時の代表的な研究者である Daniel Bernoulli、Clairaut をも巻き込み積極的に論じられ、種々の解法が試みられた。また、d'Alembert は独自にこの問題を解いた⁵⁾。

Euler 自身もこの問題に取り組み、一連の論文を書いた。それらは伝統的な幾何学的解法による4編の論文と⁶⁾、新しい解析的解法による1編の論文⁷⁾からなる。ここでは、前者の代表として、“De motu corporum in turbo rectilineo mobili circa axem fixum, per ipsum tubum transeuntem” (管を通る固定軸の周りに運動する直線状の管中の物体の運動について) を取り上げ、その解法を説明する。

まず、Euler がこの解析において用いた運動法則から見ていく。彼はここで、物体の落下に代表される等加速度運動の3つの基本公式をあげる。それらは、

$$v = \frac{a}{2}t, \quad x = \frac{a}{4}t^2, \quad v^2 = ax (= u)$$

である。ここで、 v は物体の速さ、 a は加速度、 x は距離、 t は時間を表す。また、 u は自由落下により v^2 の速さを得る高さを表す⁸⁾。そして更に、これらの公式の微分形を以下のように与える。

$$dv = \frac{a}{2}dt, \quad dx = \frac{a}{4}(dt)^2, \quad du = a \cdot dx$$

次に質点を含む管の回転運動にこれらの公式を適用する。ここでは、Euler の幾何学的解法の特徴を見るのが目的なので、外力が働かず質点が管の伸びた方向に速さを持つ場合を検討する。この手法の概略は次の通りである。ある時間が経過したときの管とその中の質点の位置を幾何学的に表示する。その位置に達した瞬間に管と質点の相互作用がなくな

り、次の微小時間 dt の間、この微小時間の始めにそれぞれが持つ速さで自由に動くことと仮定する。当然、 dt 後には質点は管に含まれない。例えば、管は先に進み、質点は遅れる。ところが、実際は dt 後は両者間に相互作用が働くので、質点は管に含まれる。そして、それぞれが自由に動いた位置の間まで質点を含む管は進む。そこで、自由に進まず、質点を含んだまま管が進んだことによって管が失った運動と、質点を得た運動を考慮することにより、質点と管の運動を求めよう。

それでは具体的に計算で両者の運動を求めよう。図 1 において、OF をある時刻における管の位置とする。また、質点は点 A にあるとする。ここで、 $OA=x$ とする。質点は点 A において OF 方向に速さ p (あるいは p : 「その速さを与える高さ

さ)」を持ち、また管は点 O の周りに回転するので、端の点 F は Ff 方向に速さ u (あるいは u : 「その速さを与える高さ」) を持つとする。この時、質点 A は微小時間 dt に速さ p で距離 $AP(=dx)$ 動くことができるとする。更に点 O に関する管の慣性モーメントを Mkk とする。

もし、この瞬間に管と質点の相互作用がなくなり、お互い等速運動により自由に動くなら、微小時間 dt 後に管の端 F は点 f に至るとする。また、質点 A は点 p に至るとする。従って次の式が成立する。

$$\frac{dx}{\sqrt{p}} = \frac{ds}{\sqrt{u}} \quad \dots (1)$$

ところが、実際は管と質点は互いに圧力 P を及ぼしあうので、管は $O\phi$ までしか進まず、また質点は a まで進むとする。

管に関しては、この圧力により管が受ける力のモーメントが Px なので、点 F の加速度は

$$\frac{Px}{Mkk} \cdot OF$$

となる。この加速度により F は ϕ まで進むので、前述の基本公式 $dx = \frac{a}{4}(dt)^2$ より、

$$f\varphi = \frac{Pfx}{Mkk} \cdot \frac{ds^2}{4u}$$

が得られる。ここで、右辺の f は管の長さ OF である。

次に、質点も圧力 P を受けて p 進む。質点の質量を A とすると、加速度は P/A なので、同じ基本公式より得た p と幾何学的関係より得た q より、 pq の値として

$$pq = p\pi + q\pi = \frac{(Axx + Mkk) Pds^2}{4AMkku}$$

が得られる。また、別の幾何学的関係より

$$pq = \frac{dxds}{f} = \frac{ds^2\sqrt{p}}{f\sqrt{u}}$$

が得られ、圧力 P は

$$P = \frac{4Mkk\sqrt{pu}}{f(Axx + Mkk)}$$

となる。この圧力により、管の点 F の減速は基本公式より、次の様に表すことができる。

$$\frac{du}{ds} = -\frac{Pfx}{Mkk} = -\frac{4Ax\sqrt{pu}}{Axx + Mkk} \quad \dots (2)$$

質点は管が回転しなければ微小時間 dt の間に等速運動により点 P に進むが、実際は管が回転するので、点 P に至る。それ故、質点は $O - OP$ だけ加速される。その量は

$$O\pi - OP = \frac{P\pi^2}{2OP} = \frac{Aa^2}{2OA} = \frac{xds^2}{2ff}$$

となる。それ故、この加速で質点が受ける力⁹⁾を g とすると、質点が受ける加速度は

$$\frac{g}{A} = \frac{2xu}{ff}$$

となるので、基本公式より、次の関係式が成立する。

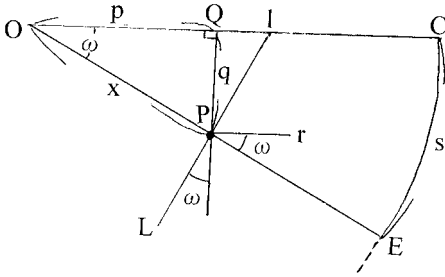
$$dp = \frac{2uxdx}{ff} \quad \dots (3)$$

得られた3つの関係式(1)(2)(3)を連立させて解くと、

$$p = \frac{H}{A} - \frac{GG}{Aff(Axx + Mkk)}, ds = \frac{Gfdx\sqrt{A}}{\sqrt{(Axx + Mkk)(Hff(Axx + Mkk) - GG)}}$$

が得られる。ここで、G、H は定数である。以上で質点と管の運動を与える式が求められた。

2-2 . 質点を含む管の回転運動に関する解析的解法



次に、Euler により 1746 年に書かれた論文 E86 は、E827 とはまったく異なり、解析的方法により同じ問題を解いている。注 6 の 4 つの論文で扱われたすべての場合を E86 で扱っているが、比較のため上と同じく外力が働かない場

合を取り上げる。図 2 において、OC を時刻 $t=0$ における管の位置とする。時間 t の後、管は点 O を中心として角度 ω 回転し、点 C は点 E に至り、質点は点 P に至るとする。ここで、 OQC QPq 、 QPq Pr 、 OPE LPI とする。また、 $OQ=p$ 、 $OP=x$ 、 $PQ=q$ 、弧 $CE=s$ 、管の点 O に関する慣性モーメント $=Mkk$ 、物体の質量 $=A$ 、 $OC=f$ とする。

最初に管の速さの変化を与える力のモーメントを慣性モーメントと回転角で表す。管の点 E の速さは $\frac{ds}{dt} = \frac{fd\omega}{dt}$ で与えられるので、「この速さを与える高さ」を u とすると、

$$u = \frac{ffd\omega^2}{dt^2}, \quad du = \frac{2ffd\omega d\omega}{dt^2}$$

となる。それ故、この速さの変化を与える力のモーメントは

$$\frac{Mkkdu}{ffd\omega} = \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$$

となる。

まず、質点 P に関する運動方程式を求める。この際、Euler は点 P を空間に固定された直交座標系で表す。P の座標として、 $OQ=p$ 、 $QP=q$ をとると、

$$Pr \text{ 方向の物体の速さ} = \frac{dq}{dt}, \quad \text{物体に作用する力} = 2A \frac{ddp}{dt^2},$$

Pq 方向の物体の速さ $= \frac{dq}{dt}$ 、物体に作用する力 $= 2A \frac{ddq}{dt^2}$ 、
 となる。そして、この 2 つの力を PE と PL 方向に分解し、次に
 $p = x \cos \omega$ 、 $q = x \sin \omega$ により、 p 、 q を x で置き換えると、

$$\text{PE 方向に作用する力} = \frac{2A dx - 2Ax d\omega^2}{dt^2},$$

$$\text{PL 方向に作用する力} = \frac{4Ax d\omega + 2A x d d\omega}{dt^2}$$

となる。

物体には管を垂直な PL 方向に押す圧力 P の反作用以外の外力は作用しないので、

$$\frac{2A dx - 2Ax d\omega^2}{dt^2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad dx = x d\omega^2 \dots (4)$$

$$\frac{4Ax d\omega + 2A x d d\omega}{dt^2} = -P \quad \dots (5)$$

また、管については軸 O に関する力のモーメントは Px なので

$$\frac{2Mk d d\omega}{dt^2} = Px, \quad \text{すなわち} \quad \frac{2d d\omega}{dt^2} = \frac{Px}{Mk} \quad \dots (6)$$

が得られる。

3 つの関係式 (4) (5) (6) を連立させて解くと、

$$P = - \frac{4AMk dx d\omega}{(Mk + Axx) dt^2}$$

$$dx^2 = - \frac{E^2 a^3 dt^2}{A(Axx + Mk)} + b dt^2$$

$$d\omega = \frac{E a dx \sqrt{a}}{\sqrt{(Mk + Axx)(A b (Mk + Axx) - E^2 a^3)}}$$

が得られる。ここで、E, a, b は定数である。

3 . 結論

イントロダクションでも述べたように、18 世紀半ばまでは、力学の

諸問題を解く普遍的な方法は存在しなかった。それらの方法は、§ 2-1で挙げた幾何学的方法や $f dt = dv$ を用いる方法、更には保存則を用いる方法等であった。例えば、ここで扱った質点を含む管の運動を Daniel Bernoulli は幾何学的方法と、保存則を用いる方法で解いた。また、Clairaut は $f dt = dv$ と保存則を組み合わせた方法と、幾何学的方法で解いた。d'Alembert は幾何学的方法で解き、Euler はここで述べたように、幾何学的方法と運動方程式を用いる方法で解いた。

ここで、彼らを用いた幾何学的方法は、§2-1の始めに述べた概略と似た方法である。Daniel Bernoulli、Clairaut、d'Alembert が用いた方法は、自由に運動できなかつたことにより2物体の一方が失つた運動と他方が得た運動を等しいとおくことにより、実際の運動を求める手法であり、いわゆる d'Alembert の原理を想起させる¹⁰⁾。Domenico Bertoloni Meli は Clairaut が用いたこの方法を「d'Alembert の原理に類似しており、私は d'Alembert の原理と呼ぶであろう」¹¹⁾と述べている。また、Daniel Bernoulli 全集の編集者である David Speiser は第3巻への General Introduction の中で「Daniel Bernoulli は幾度か、特に St.29 と St.40 で、ある原理をほのめかしている。これは Truesdell が *Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser. II, Vol.11* への序で示した、今日 d'Alembert の原理と呼ばれているものである」¹²⁾と述べている。従つて、この手法は当時の研究者たちにより広く用いられた方法である。

しかし、この原理の位置づけは、彼らにより異なる。幾何学的方法のみに頼つた d'Alembert は、いわゆる d'Alembert の原理をすべての力学問題を解くための普遍的原理と見なした。それに対し、Daniel Bernoulli は d'Alembert 同様、未知の普遍的原理を求めていたが¹³⁾、この原理を普遍的原理とは見なさなかつた¹⁴⁾。

彼らと同様、普遍的原理を求めていた Euler が追求した道は、私たちが運動方程式と呼ぶ原理につながる道であつた。彼は 1730 年に書いた物体の衝突に関する論文で§2-1で挙げたに相当する式を挙げている¹⁵⁾。また、1734年に書かれた *Mechanica* の第1巻ではある微小時間における、ある物体の速度の増加が、力と微小時間の積をその物体の質量で割つたものに等しいと述べる¹⁶⁾。しかし、*Mechanica* では質点のみの運動を、Maltese の言う「[物体]固有の座標系」に基づいて論じたものであつた。その後、広がりを持つ物体の、固定点の周りの回転運動の運動方

程式を得た¹⁷⁾ Euler は、質点に関する「力を物体のまさに質量で割ったものが加速力を表す」原理と「[広がりを持つ物体に]作用する力のモーメントを物質のモーメント[慣性モーメント]で割ると、回転力[角速度の時間微分]を与える」原理「なしでは、[広がりを持つ物体の問題を解こうと]試みることすらできないであろう」と述べる¹⁸⁾。

このような2つの原理の重要性を Euler は 1730 年代から認識はしていたが、普遍的原理として用いることはまだなかった。事実、1742 年に書かれた論文 E827 では、§2-1 に示したように物体の自由落下を連想させる、等加速度運動に関する公式を用いて解かれた。ところが、1746 年に書かれた論文 E86 では Euler が 1730 年代から述べていた、普遍的な2つの原理を用いて問題が解かれる。その原理の適用を可能にした一番重要な手段は空間に固定された直交座標系であった。質点が受ける力は2つの座標成分の時間に関する2次微分として表され、次に、計算を簡単にするため、極座標系に変換される。そして、その1つの成分が質点に働く圧力と等しく、他方の成分が0に等しいとおくことにより、運動の微分方程式が得られる。管に関しても、圧力により生じる力のモーメントが、慣性モーメントと角速度の時間微分の積に等しいとおくことにより、運動に関する微分方程式が得られる。後は、これらの微分方程式を連立させて解くだけである。座標さえ適切に選べば、後は機械的に方程式をたてることができ、幾何学的手法のような職人芸は必要としない。d'Alembert は自分の名をつけた原理について

「この原理 [いわゆる d'Alembert の原理] により、容易にそしてほとんどものともせず解くことができない問題は存在しない、あるいは少なくとも、容易に方程式に表すことができない問題は存在しないことを断言できると、私は信じている。なぜなら、この [原理が] 動力学で要求される全てであるから。そして、その後、方程式を解くこと、あるいは積分することは、純粋な解析学の問題であるからである」¹⁹⁾

と述べているが、「この原理」とは d'Alembert の原理ではなく、Euler が提唱した2つの原理がまさに、この引用で述べられている内容に適切であることは明らかであろう。

更に、この Euler の方法について指摘しなければならない点がある。式 (4) の左辺の第2項 $2Ax d\omega^2/dt^2$ は遠心力を、式 (5) の左辺の第1項の

$4Adxd\omega/dt^2$ は Coriolis の力を表す。これらの項は、意識しなくても自動的に導かれることは重要である。遠心力はともかく、 $4Adxd\omega/dt^2$ については、Euler はその意味を評価できなかった。Bertoloni Meli は Clairaut の解析を論じたとき、彼が遠心力を表す項は考慮したが、Coriolis の力を表す項を省略したと書いているが²⁰⁾、これは無いものねだりと言うべきであろう。Euler ですら、幾何学的解法を用いた E827 では、遠心力は考慮したが、Coriolis の力を表す項は省かれている。これは彼が意識的に省略したのではなく、その存在に気づかなかったからである。E86 のような解析の方法でなければ、前もって知られていない物理量は考慮されないのである。運動の微分方程式を解くことにより、予想もしなかった物理量を見出すという、力学の稔り豊かな成果は、17 世紀的な幾何学的力学によってでなく、Euler により 18 世紀に作り上げられた解析的力学によって得られたのである。

その後、Euler は剛体の運動に関して、固定点の周りの運動の方程式から、固定されていない、自由な軸が斜めに力を受ける時の剛体の運動という、更に一般的な運動の方程式を得ようと努める。d'Alembert の地球の歳差運動に関する著作²¹⁾ にヒントを得て、まず、この問題の特殊な場合における剛体の運動方程式を求めた Euler²²⁾ は、更にこの問題を一般化し、Euler の剛体の運動方程式を得る²³⁾。そして、1775 年には物体の任意の要素に対し、要素の質量とその加速度の積の和が外力に等しいとおいた運動方程式と、各要素の力のモーメントの和は外力によるトルクに等しいとする一般的な方程式を得た²⁴⁾。この過程において Euler が用いたのは、保存則でも幾何学的方法でもなく、直交座標系を用いた解析的方法であった。

注

- 1) John T. Cannon, Sigalia Dostrovsky, *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, (Springer-Verlag, 1981)
- 2) Giulio Maltese, "Taylor and John Bernoulli on the vibrating string: aspect of the dynamics of the continuous systems at the beginning of the eighteenth century", *Physis*, 1992, vol. XXIX, pp. 703-744 の p.728 参照。
- 3) Giulio Maltese, "Towards the rise of the modern science of motion: the transition from synthetical to analytical mechanics", in Fabio

- Bevilacqua (Ed.), *History of Physics in Europe in the 19th and 20th Centuries*, Conference Proceedings, 1993, Vol. 42, pp. 51-67, Bologna: Società Italiana di Fisica.
- 4) Maltese, 1993, p. 52.
- 5) 彼らの解法については、Ryoichi Nakata, “Analysis of motion of a rotating tube including a material point by Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli, Clairaut, d’Alembert and Euler”, 『金蘭短期大学研究誌』、2003、34号、pp. 27-51 参照。
- 6) 1. “De motu corporum super superficiebus mobilibus”, *Opera postuma*, vol. 2, 1862, pp.63-73, E826, (*Opera Omnia* ser. II, vol. 7, pp. 228-247)
 2. “De motu corporum in turbo rectilineo mobili circa axem fixum, per ipsum tubum transeuntem”, *Opera postuma*, vol. 2, 1862, pp.74-84, E827,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 7, pp. 248-265)
 3. “Dissertation sur le mouvement des corps enfermés dans un tube droit, mobile autour d’un axe fixe”, *Opera postuma*, vol. 2, 1862, pp.85-113, E828,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 7, pp. 266-307)
 4. “De motu corporum in tubis circa punctum fixum mobilibus”, *Opera postuma*, vol. 2, 1862, pp.114-124, E829,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 7, pp. 308-326)
- 7) *De motu corporum in superficiebus mobilibus, Opuscula varii argumenti*, vol. 1, 1746, pp.1-136, E86,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 6, pp. 75-174)
- 8) “altitude huic celeritati debita”あるいは“la Hauteur due à la vitesse”(「その速さを与える高さ」)と Euler が名づけた概念である。また、これらの公式が現在とはファクター 2 だけ異なるのは、Euler の単位系の取り方による。
- 9) 遠心力に相当する。
- 10) 今日の d’Alembert の原理ではなく、18 世紀に受け入れられていた d’Alembert の原理である。
- 11) Domenico Bertoloni Meli, “The emergence of reference frames and the transformation of mechanics in the Enlightenment”, *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, vol. 23, pp. 301-335, 1993 の pp. 307-308.
- 12) Daniel Bernoulli, *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3,(Birkhäuser Verlag, 1987) p. XXVI.
- 13) Daniel Bernoulli の論文 St.40 の p.55 参照。
- 14) 例えば Speiser は次のように述べる。「Daniel Bernoulli はこの原理

[d'Alembert の原理] を色々な問題を解くのに用いたが、d'Alembert はそれを Newton の力の概念や、彼の運動法則にすら置き換えることのできる動力学の普遍的原理と述べた....ここでは [Daniel] Bernoulli は決してそのような主張をしなかったことを述べておくだけにしよう」(Daniel Bernoulli, *Die Werke von Daniel Bernoulli*, Band 3, (Birkhäuser Verlag, 1987) p. XXVI.)

- 15) “De communicatione motus in collisione corporum”, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. V, 1730/1, (1738) pp. 159-168, E22(*Opera Omnia* ser. II, vol. 8, pp. 1-6) の p.164.
- 16) *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, vol. 1, 1736, p.62, Propositio 20,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 1, p. 56)
- 17) “Scientia Navalis”, vol. 1, 1749, p. 68,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 3, p. 74)。なお、実際に書かれたのは、1738 年である。 .
- 18) “Dissertation sur la meilleure construction du cabestan”, *Pièce qui a remporté le II. Prix de L'Académie Royal des Sciences en M.DCC.XLI*, (1745) pp. 29-87 の art. 28, p.49(*Opera Omnia* ser. II, vol. 20, pp. 36-82 の p. 51)。なお、実際に書かれたのは、1738 年である。
- 19) D'Alembert, Art. Dynamique, *l'Encyclopédie, Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, éditée par d'Alembert et Diderot (35 vols, Paris 1751-1780) vol.5, 1755, p.176.
- 20) Bertoloni Meli, *ibid*, p.308. 続いて Bertoloni Meli も述べているように、Clairaut は同じ論文の後半で Coriolis の力に対応する項を方程式に導入している。しかし、この項の導出は特殊な幾何学的関係を用いており、それなしに機械的にこの項を導くことができないのは、Euler の幾何学的解法を見ても明らかである。
- 21) D'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre, dans le système newtonien*, (Paris, 1749)
- 22) “Decouverte d'un nouveau principe de Mécanique”, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, vol. 6, 1750(1752) pp. 185-217,(*Opera Omnia* ser. II, vol. 5, pp. 81-108)
- 23) 最終的には 1760 年に書かれ、1765 年に出版された *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* にこれらの成果がまとめられる。
- 24) “Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi”, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol. XX, 1775,(1776) pp. 189-207, E478(*Opera Omnia* ser. II, vol. 89 pp. 84-98)

(金蘭短期大学教授)