解析力学の形成における数学

中根美知代

1．はじめに

自然の考察において、数学解析は重要な道具として用いられている。数式で記述された現象を数学的に分析して、その根底にある法則を把握し、現象を予測するということが、科学革命期以降とりわけ積極的に行なわれてきた。このような操作を通じて新しい微分方程式が発見され、さらにその解法を探ることにより、数学自体にも大きな進歩がもたらされてきた。力学の理論が数学にならって体系化され、それに基づいて他の諸科学も整備されてきた、という側面も指摘されている。このような、数学とのかかわりのなかでもたらされた個々の自然科学の理論の発展過程は、多数研究されている。

歴史的に見ても、今日の科学研究でも、数学を他の諸科学に適用するのは、ごく自然なことのように思われる。ところが数学は、そもそも他の自然科学とは大きく異なる独自の特徴を持つ。証明という概念、演繹的な理論体系、現象とは独立した仮定や前提条件をおいて考察を進め、それらをゆるやかにする、すなわち一般化する方向で議論を進めるといった要素が挙げられよう。数学という概念の中には、古代からこのような要素が含まれていたはずである。数学を他の諸科学に適用する時点で、互いに相容れない部分はなかったのだろうか。

数式あるいは幾何学的な対象の処理の方法を与えるという数学の側面を活用することにより、自然科学の飛躍的な進歩がもたらされたため、両者の相容れない部分については、これまでほとんど論じられてこなかった。しかし、19 世紀には、数学は物理学とは独立した形で整備され始める。このような情勢のなか、Joseph Louis Lagrange（1736-1813）の『解析力学』が発表され、それを受ける形で、William Rowan Hamilton（1805-65）と Curl Gustav Jacob Jacobi（1804-51）による

Hamilton-Jacobi 理論の大枠が作られた。彼らはまた、純粋数学でも大きな仕事を残している人物でもある。自然現象を扱う力学を数式処理し演繹的に体系化する、すなわち数学として扱おうとするとき、3 人は三様の態度をとる。彼らの力学的エネルギー保存則の扱い方に注目して、このことを示していく。

２.『解析力学』に見る Lagrange の態度

1788 年に発表された Lagrange の『解析力学』は、力学から幾何学的な描像を一切捨て去り、あらゆる力学現象の考察を数学解析に帰着する方針がとられているという点で、力学、さらには物理学の数学化を進めていくうえで、最も大きな影響を与えた著作である[1)]。静力学と動力学を同じ基礎の上に演繹的に展開することを目的とするこの著作において、Lagrange は、静力学での釣り合いの考え方から、質点系に対する動力学の基礎方程式

$$\sum\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz+Pdp+Qdq+Rdr+\cdots\right)m=0 \tag{1}$$

を導入した。ここで、m は質点の質量、t は時間、(x, y, z) は質点の位置、$P, Q, R, \cdots$は系の質点に働く力、$dp, dq, dr, \cdots$は、質点を任意に微小変化させたとき、それらを変位させる力の方向成分で、和はすべての質点についてとったものである。Lagrange は、$Pdp+Qdq+Rdr+\cdots$がある関数 Π の全微分形であることを仮定した上で、エネルギー保存則、Lagrange の運動方程式、最小作用の原理といった、今日の Lagrange 形式の重要な概念を導いている。

それまで、形而上学的な原理として扱われることも多かったエネルギー保存則や最小作用の原理を運動方程式から導いたのも、『解析力学』の大きな成果である。ただし、それらを導く際に、数学上決定的な条件となる $Pdp+Qdq+Rdr+\cdots=d\Pi$ が「仮定」されていることは、注目に値しよう。もちろん数学では、ある条件のもとで成果を出すことは、まったく差し支えない。しかし、『解析力学』が扱っているのは、力学の問題である。Lagrange の「仮定」は、力学の立場では何を意味しているのだろうか。

このことについて、Lagrange は特別な見解を述べていない。彼が、

力学的な現象にみられる系は保存系に限定してよいと判断していたとするならば、方程式(1)の左辺の後半部分を最初から $d\Pi$ にしておけばよい。しかし、実際にはそうなってはいないし、保存系に限定してよいという根拠も十分に論じられていない。実際彼は、保存系の例（中心力による運動）とともに、そうでない運動（流体動力学）も自然界に存在することを指摘している。自然界の中で保存系が占める地位についてLagrangeの言及が見当たらない以上、彼の「仮定」とは、自然現象への理解とは一応独立しており、そう仮定すると数学的に見通しのよい理論が構成できるという以上の意味は持っていなかったと推察されよう。すなわちエネルギー保存則をある数学的な仮定のもとに成り立つものとして位置付けているにすぎないのである。

Lagrangeの著作の特徴である数学的な簡潔さ、美しさや論理の一貫性は『解析力学』で頂点に達した。しかし、科学史家Arnoldは、彼とほぼ同時代からやや後にかけて活躍し、彼と同程度の数学的な素養を持ち合わせていたフランスの科学者Pierre Simon Laplace（1749-1827）やSiméon-Denis Poisson（1781-1840）は、かならずしもLagrangeの姿勢に同意していなかったことを指摘している[2)]。彼らは、数学的手法を分析の手段として積極的に活用するものの、たとえば、数学的な仮定を置いて自然現象を論じていくことは好まなかったようである。『解析力学』で提示されたいくつかの原理、力学形式の重要さや価値は、誰もがほぼ例外なくが認めるところであったが、現象を記述するはずの力学に数学的な仮定を持ち込むLagrangeの態度は、全面的に支持されていたわけではなかった。

３．Hamiltonの力学研究

3-1　Hamiltonの自然観

今日のHamilton形式の原型は、1834年と35年に発表された2部からなるHamiltonの論文、“動力学の一般的方法”で提示されている[3)]。一枚の図も用いず解析的手法で貫かれた議論や演繹的な理論体系の提示は、この著作が『解析力学』の強い影響のもとでなされたことを示している。実際彼は、34年論文の序文で、『解析力学』を科学の詩と讃えていた。しかし、一方で、Boscovichの原子論の登場を「革命」と捉えた

Hamilton は、以下のように続けている[4)]。

> 力についての科学、すなわち時間と空間の中での法則に従って作用する力学の研究は、すでに別の革命を行っており、より活発になってきている。これは、凝固や結合といった概念、その他の物質間の束縛、幾何学的な仮想条件、Lagrange はこれらの概念や条件について適切な推論を行ったのだが、こうしたものを捨て去ることに、（中略）よっている。科学が自然の見方の進歩によってある方向へ進んでいる一方で、数学的な方法の発明によって、科学はまた別の方向へ進むことであろう。（34 年論文、p.247。）

当時は、「幾何学」という言葉で数学一般を指していたので、Hamilton のいう「幾何学的な仮想条件」とは、前節で見たような Lagrange が置いた数学的な仮定全般を意味すると判断できよう。Hamilton もまた、Lagrange を全面的に容認していたわけではない。数学的技法の面では先人の成果を受継ぎ発展させる一方、彼独自の「革命」後の新たな力学体系を構築しようとしたのであった。

Hamilton は力学研究に先立つ幾何光学の研究から得たアイデアをもとに、力学系の作用積分を「特性関数」と定義し、運動方程式の解をはじめとするその系のあらゆる性質が、特性関数から演繹できることを示した。特性関数は、今日 Hamilton-Jacobi 方程式とよばれるタイプの非線形 1 階偏微分方程式を解くことによって得られることになる。すなわち連立 2 階常微分方程式である運動方程式を解くことは、1 階偏微分方程式を解くことに帰着されるのである。

このような手法自体、Hamilton の独自のものである。しかし、理論力学を構築するにあたっての Lagrange との決定的なちがいは、エネルギー保存則の捉え方であろう。

> 活力の法則がみたされない空想上のケースでは、私達の方法も適用されないだろう。しかし、これらが物体の相互作用の不十分な見方によって示唆されたケースであることを、この宇宙の数学的な力学を作ろうと真剣に試みてきた人々は十分納得することであろう。（34 年論文、p.262。）

Hamilton によれば、自然界に存在するすべての系でエネルギー保存則は成り立っているのである。実際、彼が理論の出発点として置いた運動方程式は、位置のみに依存するポテンシャル関数が存在することを前提とした、保存系を記述するものであった。Lagrange のように、まったく一般の場合まで射程に入れて考えておき、その中で保存系だけとりあげて論じているわけではないし、保存系だけを扱うことは力学の理論を制約することになるとも考えていなかった。Hamilton は、運動方程式を積分して保存則を導いているが、それは、すでに知られている系の性質に対して別の数学的な表現を与えたにすぎないといえよう。

3-2. 連立偏微分方程式とエネルギー保存則

1835 年論文は、1834 年の成果を整理・拡張したもので、彼自身による Hamilton 形式を最終的に提示したものである。そこでは、特性関数を修正した、力学の主関数

$$S=\int_0^t (U+T)dt \tag{2}$$

が導入されている。ここで、U は今日のポテンシャル関数の符号を逆にしたもの、T は運動エネルギーである。また、この論文では、正準座標、運動方程式の正準形の導入、Hamilton の原理の原型など今日の正準形式の基本的な道具が提示されている。もちろん、正準方程式の解が主関数により与えられること、主関数は非線形 1 階偏微分方程式をみたすことにより得られるという彼の基本的な考え方は貫かれていた。

主関数のみたす偏微分方程式を導くとき、Hamilton はやや特異な手続きをとっている。彼は一般座標（η_1, …, η_{3n}）を導入し、主関数 S を時間で微分して、Hamilton-Jacobi 方程式

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T\left(\frac{\partial S}{\partial \eta_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial \eta_{3n}},\eta_1,\cdots,\eta_{3n}\right)=U(\eta_1,\cdots,\eta_{3n}) \tag{3}$$

を導く。そして、エネルギー保存則から導かれる、質点系の初期値(e_1, …, e_{3n}）に関する条件

$$\frac{\partial S}{\partial t}+T\left(\frac{\partial S}{\partial e_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial e_{3n}},e_1\cdots,e_{3n}\right)=U\left(e_1,\cdots,e_{3n}\right) \tag{4}$$

を付加し、主関数は連立偏微分方程式をみたすとしている。

これは、数学上きわめて不自然な手続きである。2 つ以上の微分方程式を同時にみたすような解は一般的に存在しないし、(3) 式のみから主関数 S は導かれるからである。ただしこの議論は、ポテンシャル関数が質点の位置のみに依存している保存系に対してなされているので、(4) 式は実質的に新しい条件を付け加えたものにはならない。この場合には、連立方程式をみたすような解が存在し、当座矛盾は生じない。

Jacobi が Hamilton の成果を知ったとき、ただちに指摘したのはこの箇所だった。1837 年に発表した論文、“ 偏微分方程式方程式を常微分方程式系に帰着する方法 ” で、Jacobi は、ポテンシャル関数が質点系の位置のみではなく時間に陽に依存する場合にも、すなわち非保存系の一部に対しても、主関数の理論は成立することを指摘した[5)]。そして (3) 式に相当する偏微分方程式のみを導き、これを解けば、ポテンシャル関数に応じた主関数が求まるというように理論を整理した。さらに Jacobi は、Hamilton の付加した (4) 式は誤りではないが余分であると述べ、必要以上に理論を複雑かつ制限していると評価した。

Hankins が著した伝記によれば、Hamilton は Jacobi の修正を不愉快に感じていたようである[6)]。Hamilton の自然観をふまえると、その理由は次のように考えられよう。Jacobi にしたがえば、保存系に限って論じるというという制約もあわせて緩められる。それは、数学的には自然な一般化であり、Hamilton の理論が扱える系を拡張したという意味では進歩をもたらす。しかし、自分の理論を保存系以外でも成り立ちうるようにすることは、Hamilton にとって、むしろ不都合ではなかっただろうか。彼は、自然界に存在するのは保存力系のみと考えており、それを記述する目的で Hamilton 形式を作った。非保存系は Hamilton からしてみれば想像上の系で、「力学の精神」が除外するものなのである。彼の理論が、本来目的としていた自然界を記述することからかけ離れ、想像上の運動までも記述するようになりうることを、彼は望まなかったのではないだろうか。Jacobi にとっては余分な制限であった (4) 式は、Hamilton にとっては、現実の世界に存在する保存系を記述する理論を作ったことを訴えるために不可欠だったと推定されるのである。

4．Jacobi の力学研究における数学

Jacobi の修正により、Hamilton の成果は数学的にも整理されたものになったのみならず、時間 t を陽に含むようなポテンシャル関数も扱えるよう理論を拡張することができた。しかし、数学の立場での一般化という視点からは、Jacobi の拡張は不十分なように思える。偏微分方程式⑶を導く手続きは、ポテンシャル関数が時間に陽に依存する場合のみならず、より一般的な場合、たとえば速度に依存する場合などにも成り立つからである。Jacobi はなぜ、あえてこの場合に限定して Hamilton の理論を拡張したのだろうか。

1836 年、Jacobi は、ある制限 3 体問題の新しい積分を発見した[7)]。太陽・惑星・彗星からなる系を考える。それぞれの質量は、m, m', 1 で、彗星の質量は、太陽・惑星に比べると無視できるほど小さく、彗星は太陽と惑星から影響を受けるが、それらに影響を与えることはないとする。太陽は原点に固定され、惑星は xy 平面上を太陽の周りを一定の角速度 n' で円運動するものとする。惑星の位置（$\cos n't$, $\sin n't$, 0）が時間を陽に含む形で表現されるので、彗星の運動にかかわるポテンシャル関数は時間 t を陽に含むものになるのである。

Jacobi は、ポテンシャル関数が時間を陽に含む系に実際に遭遇していたのであった。したがって、Jacobi の拡張は、理論の一般化を目的としたものではなく、あくまでも力学現象に即してなされたものであった。

Jacobi が 1842 年から 43 年にかけて行なった『力学講義』からは、彼が力学とそれから派生した数学を明確に区別していく様子がうかがわれる[8)]。確かに彼は、一度は時間が陽に含まれるポテンシャル関数にまで Hamilton の理論を拡張した。しかし、その後、保存系に限定して理論を再構成しており、実際に『力学講義』で用いられるのはこちらの理論なのである。

Jacobi はまた、正準座標の役割にも注目していた。Hamilton が正準形式を導入した際には、運動エネルギーが速度成分の 2 次形式になることが前提とされていた。Jacobi は、Hamilton の理論に多少手を加えることにより、この条件をはずした。そして、質点の軌跡が変分原理により決定されることから、より一般的な変分問題は正準形式の枠組みで扱

えることを提示したのであった。一般座標ではこのような構成は理論上不可能なのである。

逆に、具体的な力学の問題に対する Hamilton-Jacobi 方程式を導くにあたっては、必ずしも正準座標を導入する必要はない。Jacobi はこのことに留意し、力学の問題の Hamilton-Jacobi 方程式は原則として直交座標で記述し、適切な変換を施すことにより、この方程式を解いている。

Jacobi は、一般化という視点から理論を拡張してはいる。しかし、そのようにして得られた数学の理論と力学の理論との間には明確な区別をつけている。Jacobi は Hamilton の理論は力学現象に即して拡張していた。また、力学から得られたアイデアをもとに、一般化という視点から数学の理論を作り上げていくが、それを力学の問題に適用する際には、数学的に制限するという形で現象との対応をつけ、その制約のもとで、最も適当な手段により問題の解決にあたっていた。

5．おわりに

解析力学を作り上げた Lagrange, Hamilton, Jacobi の態度を単純化して見るならば、以下のようにまとめることができよう。Lagrange は、現象を扱うことと数学独自の理論展開とを識別することはしなかった。Hamilton は数式は現象を記述するものとし、数学の持つ一般化の考え方を力学に取り入れようとはしなかった。Jacobi は、現象の解析から得られた成果を数学の視点から一般化していった。しかし、数学的に拡張された理論は、力学の理論とは切り離して扱かっていた。

今日では一つにまとめあげられている理論が、複数の研究者による成果の集大成であること、しかも彼らはまったく異なる目的を個別に持っていたのは、ごく普通のことであろう。しかし、一つの理論の形成過程を論じる歴史研究の場合、先行する研究者のどの部分を積み上げていったかという部分に限定して議論せざるを得ない。しかも、彼らの相異なる面を捉えようとすると様々な要素が挙げられてしまい、結局、議論がまとまらないことになりかねない。その結果、彼らが違うことを考えていたことは、見逃されがちになる。今回、エネルギー保存則に焦点を絞り、力学と対比させた上で数学の特性をどう捉えるかという視点を立て

るより、この３人の考え方の違いを明らかにすることができた。彼らの数学と力学に対する考え方が、当時としてはどの程度一般的なものなのか、あるいは、たとえば Lagrange の考え方はその後どのように引き継がれていったか等の考察については、今後の課題としたい。

文献と注

1）Joseph L. Lagrange, *Mécanique analitique*, (1788), Paris. 本論文の作成にあたっては、Second edition, *Mécanique analytique* vol.1 (1811), vol.2 (1815)、Paris を定本とした版を用いた。

２）David H.Arnold, “The Mécanique Physique of Siméon-Denis Poisson: The Evolution and Isolation in France of his Approach to Physical Theory,” Part I, Part II, *Archive for History of Exact Sciences* 28, (1983), pp. 243-287.

３）William R.Hamilton, “On a General Method in Dynamics; by which the Study of the Motions of all free Systems of attracting or repelling Points is reduced to the Search and Differentiation of one central Relation,or characteristic Function,” *Philosophical Transactions* Part 2, (1834), pp.247-308 および“Second Essay on a General Method in Dynamics,” *Philosophical Transactions* Part 1, (1835), pp.95-144.

４）Hamilton と Boscovich 原子論の関係については、Thomas L. Hankins, *Sir William Rowan Hamilton*, The Johns Hopkins University Press, (1980), Baltimore/London, p.157 を参照のこと。

５）Carl G. J. Jacobi, “Über die Reduction der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Zahl Variabeln auf die Integration eines einzigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen,” *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 17, (1837), pp.57-127.

６）前出４）、Hankins, pp.196-197.

７）Carl G. J. Jacobi, “Sur le Mouvement d’un Point et sur un Cas particulier du Problèm des trois Corps,” Lettre adressée à l’Acad’emie des Sciences de Paris, *Comptes Rendus* t.3, (1836), pp.59-61 = *Werke* 4, pp.37-38. この積分を導く過程については、Michiyo Nakane, Craig Fraser, “The Early History of Hamilton-Jacobi Dynamics 1834-1837”, Centaurus 44, (2002), pp.161-227 を参照のこと。

８）Carl G. J. Jacobi, 1866: *Vorlesungen über Dynamik*, (1866) A. Clebsch ed., Berlin, reprinted by Chelsea in 1969.

（立教大学・成城大学非常勤講師）